Devoir de synthèse n°3

Exercice 1 : (13 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{x+2}$ et $g(x) = \dfrac{3x+6}{2x+2}$ et on désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs représentations graphiques respectives dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I / 1) Déterminer les ensembles de définitions de f et de g.

2) Tracer $\mathscr{C}_g$.

3) Résoudre graphiquement, dans IR, l'inéquation $g(x) \geq 0$.

4) Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

5) Tracer $\mathscr{C}_f$.

6) Résoudre graphiquement, dans IR, l'inéquation $\dfrac{3x+6}{2x+2} < \sqrt{x+2}$.

II/ 1) Déterminer les coordonnées du point A intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.

2) Soient B le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 7 et C(1 ; −3).
Montrer que le triangle ABC est rectangle.

3) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.

III/ 1) Vérifier que $E\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$ et $F(-4;1)$ sont deux points de $\mathscr{C}_g$.

2) Déterminer l'équation réduite de (E F).

3) Résoudre graphiquement, dans IR, l'inéquation $\dfrac{-3x-6}{x+1} \leq 2x+6$.

IV/ Soit la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{3|x|+6}{2|x|+2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de h et montrer qu'elle est paire.

2) Tracer $\mathscr{C}_h$ dans le même repère, expliquer.

3) Déterminer graphiquement les variations de h puis montrer que pour tout réel x ; $h(x) \leq 3$.

Exercice 2 : (7 pts)

Soit ABCD un carré de centre O, de coté $a (a \in IR_+^*)$ et ABE un triangle isocèle en E situés dans deux plans perpendiculaires. Soit I le milieu de $[AB]$.

1) a) Déterminer le plan médiateur de $[AB]$.

b) Montrer que $(ABC) \perp (OIE)$.

c) Montrer que $(EI) \perp (ABC)$.

2) Soit Δ la parallèle à (EI) passant par O.

a) Montrer que Δ est l'axe du cercle circonscrit au carré ABCD

b) Soit F un point de Δ tel que $OF = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. ABCD

Montrer que le triangle CDF est équilatéral.

c) Soit G le centre de gravité du triangle CDF.

Montrer que $(OG) \perp (CDF)$.